

水流流經草地之水力分析

唐靖雅 謝平城*

摘要 存在於地表上之草本植物會增加水流之阻力，造成流速減緩、能量損失等影響。本研究以 Biot 孔彈性介質理論為基礎，以解析方式進行研究。流場依不同孔隙介質分為三層，分別為均質水層、草層、以及土層，分別求得三層之流速分佈和剪應力分佈，進而繪出分佈圖來探討草地水流之物理現象。研究發現：當水層深度與草層高度相等時，會得到一無因次參數 δ_2 約等於 9.5，此時水、草交界面和地表之剪應力相等，且等於垂直分佈中之最大剪應力。

關鍵詞：孔隙流體、流速分佈、剪應力分佈。

Hydraulic Analysis of Flow Passing Over Grassed Ground

Ching-Ya Tang Ping-Cheng Hsieh*

ABSTRACT The existence of grasses increases the resistance of the ground, and thus decreases the flow velocity and produces energy loss. In this study, the governing equations of flow were non-dimensionalized, based on the Biot's poro-elasticity theory. These equations were solved analytically. The flow region was divided into three layers--homogenous water, vegetation and permeable soil. The velocity distribution and the shear stress distribution were analytically derived and were discussed for understanding of the flow mechanism. The shear stress distribution showed that when the dimensionless coefficient δ_2 approximately equals 9.5 with equivalent depths of water layer and vegetation layer, the shear stresses at the interface between the water layer and vegetation layer and at the ground surface are equal and reach a maximum.

Key Words : Pore fluid, flow velocity distribution, shear stress distribution.

一、前言

生長於地表之植生對於地面水流會造成諾大的影響，除了增加地表阻力、施於水流阻力和減低流速之外，還會降低輸砂率、減少地表沖蝕（植生根系可以穩定土壤），對於生態環境系統的影響更不容小覷，而在水土保持工程上地表沖蝕與輸砂皆是相當重要之課題，因此，本研究致力於以數學模式進行植生對地表水流影響之探討，期能深入了解其水力機制，促進水土保持工程之邊坡穩定、抑止土壤沖蝕、土石維護與土石流失之防治。植生水流之流況主要取決於三個因

素—植生種類、密度及排列方式，其中在種類方面 Wu (2007) 提出植物依照變形的難易度可分為柔性 (flexible) 或是剛性 (rigid)，草本植物大多屬於柔性而木本植物則被歸類為剛性；Järvelä (2002) 進行渠槽實驗以自然草體、苔類與柳樹三種不同植生進行流體阻力係數之分析。密度因子在 Kubrak et al. (2008) 所做之實驗中，針對不同植株數的流速數據提供數值解進行比較、驗證，而實驗結果顯示除了植生密度與流況有關，也與坡度、底床粗糙度、水深、植生的長度、直徑（莖剖面之直徑）和彈性模數相關。另外在 Chen et al. (2010) 渠槽實驗中將植生排列組合設為參數加以研

究, 以排列成行 (aligned)、交錯 (staggered) 與柱狀 (columnar) 的植生排列設置, 並改變植生間隔大小, 使用 3D 聲波都普勒流速儀 (3D acoustic doppler velocimetry (ADV)) 進行渠道實驗。

流速剖面是了解流況最關鍵的部分, 流速剖面有助於計算流體之剪應力、二次流、擴散係數、流量、砂粒濃度 (Chiu, 1986; Sand-Jensen and Pederson, 1999)。在研究植生對於水流的影響時, 相關文獻多由植株對水流造成之形狀阻力的觀點著手, 因此探討阻力來源、影響程度與範圍為此類研究之重點, 如 Wu (2007) 指出植生對水流造成之阻力為植生莖剖面直徑之函數, Kubrak et al. (2008) 的數學模式中, 特性長度為植生莖剖面直徑的雷諾數決定了阻力係數。早期研究重點都集中於植生造成的阻力和建立一個阻力與水流關係的經驗式上, 後來隨著測量儀器的發展, 研究者漸漸以計算流速剖面 and 雷諾應力來取代原來的研究重心, 其所採納的研究方法有三種, 分別為實驗研究、理論分析以及數值模式 (Huai et al. 2009)。本文探討之目標植物為草本植物, 因為柔軟易彎曲的特性, 草層內草體相互交雜所以可視為一個孔隙介質, 並以孔隙介質流理論 (Biot, 1956a, 1956b, 1957, 1962) 描述孔隙水流流況, 使用解析方式探討其物理現象。另外, 為確定本研究所提出解之正確性以 Kubrak et al. (2008) 的實驗數據作為驗證。

二、數學模式

過去水流流經草地之水理分析, 多數研究者將流場分割成均質水層與植生層兩層進行分析, 忽略了土壤透水性所帶來的影響, 把地表視為不透水邊界, 使用無滑移邊界條件來求解, 如此, 與真實草地之水理現象較不符合。本研究考慮了土壤之滲透性, 使地表

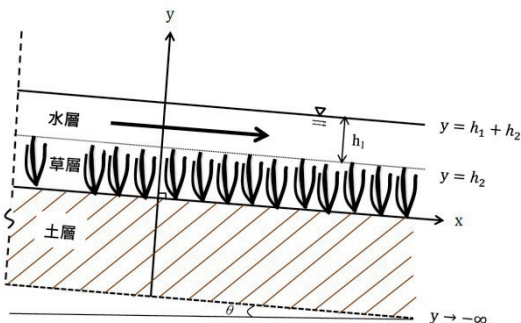


圖 1 水草土三層示意圖
Fig.1 Definition sketch

的流速列入考量, 並將流況分成三層求解, 研究示意圖如圖 1, 第一層為均質水層、第二層為草層、和第三層為土層。

1. 控制方程式

考量水具黏滯性, 且不可壓縮, 流場假設為完全發展流 ($\frac{\partial(\quad)}{\partial x} = 0$) 且為均勻流, 並假設流況已達穩態且三層水流皆為層流。探討之坡面假設為無限寬, 可忽略側向之效應, 故僅考量垂直二維。而固體之位移不予考慮, 並假設草體受力後不回復和忽略輸砂效應, 且忽略流體與固體質量偶和之效應, 基於如此假設下, 水層之連續方程式可得縱向流速 u_i 僅為 y 方向之函數, 及橫向速度 v_i 為零 ($i=1,2,3$ 分別代表水層、草層或土層中的水體), 而奈維爾-史托克方程式沿著坡面 x 方向及垂直坡面 y 方向分別可表示成:

x 方向:

$$\mu \frac{d^2 u_1}{dy^2} + \rho g \sin \theta = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad h_2 \leq y \leq h_1 + h_2 \quad (1)$$

y 方向:

$$-\frac{dP_1}{dy} - \rho g \cos \theta = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad h_2 \leq y \leq h_1 + h_2 \quad (2)$$

式中, μ 為動力黏滯係數 ($ML^{-1}T^{-1}$), u_1 為水層中 x 方向之流體速度 (LT^{-1}), P_1 為水層之水壓力 (FL^{-2}), ρ 是水的密度 (ML^{-3}), g 為重力加速度 (LT^{-2}), θ 為傾角。註: L 為長度因次, M 為質量因次, T 為時間因次, F 為力量因次。

草層和土層之控制方程式則引用宋 (1993) 改寫 Biot (1956a, 1956b, 1957, 1962) 孔彈性介質理論所建立之多孔介質層流模式中描述孔隙流體運動之動量方程式, 可表示為:

$$(1-n)\rho_s \frac{\partial v_s}{\partial t} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma_s}} + \frac{\mu n^2}{k_p} (\underline{\underline{v_f}} - \underline{\underline{v_s}}) \quad (3)$$

$$n\rho \frac{\partial v_f}{\partial t} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma_f}} - \frac{\mu n^2}{k_p} (\underline{\underline{v_f}} - \underline{\underline{v_s}}) \quad (4)$$

式中, n 為孔隙率, ρ_s 為固體的密度 (ML^{-3}), $\underline{\underline{\sigma_s}}$ 為固體的總應力 ($MT^{-1}L^{-2}$), $\underline{\underline{v_s}}$ 為固體移動速度 (LT^{-1}), $\underline{\underline{v_f}}$ 為流體速度 (LT^{-1}), $\underline{\underline{\sigma_f}}$ 為水的應力 ($MT^{-1}L^{-2}$), k_p 為比滲透係數 (L^2)。

其中，

$$\underline{\underline{\sigma}}_s = \underline{\underline{\tau}}_s - (1 - n)p\underline{\underline{l}} \quad (5)$$

$$\underline{\underline{\tau}}_s = 2G\underline{\underline{e}} + \lambda(\nabla \cdot \underline{\underline{d}})\underline{\underline{l}} \quad (6)$$

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\underline{d}} + (\nabla \underline{\underline{d}})^T) \quad (7)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_f = -np\underline{\underline{l}} + n\mu \left[\nabla \underline{\underline{v}}_f + (\nabla \underline{\underline{v}}_s)^T \right] \quad (8)$$

式中， $\underline{\underline{\tau}}_s$ 表有效應力 ($ML^{-1}T^{-2}$)， p 為孔隙水壓力 (FL^{-2})， $\underline{\underline{l}}$ 為單位矩陣， G 、 λ 為 Lamé 彈性係數， $\underline{\underline{d}}$ 為固體的位移 (L)。

其動量方程式在考慮重力作用後，由 (4) 式可以得到草層之水流控制方程式：

x 方向：

$$n_2\mu \frac{d^2 u_2}{dy^2} - \frac{\mu n_2^2}{k_{p2}} u_2 + n_2 \rho g \sin \theta = 0, \quad -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq h_2 \quad (9)$$

y 方向：

$$-n_2 \frac{dP_2}{dy} - n_2 \rho g \cos \theta = 0, \quad -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq h_2 \quad (10)$$

n_2 為草層之孔隙率， u_2 為草層中的流速 (LT^{-1})， P_2 為草層之孔隙水壓力 (FL^{-2})。

以及，其動量方程式在考慮重力作用後，土層之水流控制方程式：

x 方向：

$$n_3\mu \frac{d^2 u_3}{dy^2} - \frac{\mu n_3^2}{k_{p3}} u_3 + n_3 \rho g \sin \theta = 0, \quad -\infty < x < \infty, -\infty < y \leq 0 \quad (11)$$

y 方向：

$$-n_3 \frac{dP_3}{dy} - n_3 \rho g \cos \theta = 0, \quad -\infty < x < \infty, -\infty < y \leq 0 \quad (12)$$

n_3 為土層之孔隙率， u_3 為土層中的流速 (LT^{-1})， P_3 為土層之水壓力 (FL^{-2})。

2. 水壓力之解析解

假設無風力及水波之作用，在自由水面處 ($y = h_1 + h_2$) 的相對水壓力 P_1 為零，而水、草交界面上 ($y = h_2$)，兩層在交界面上的水壓力相等 $P_1 = P_2$ ，同理，草土交界面上 ($y = 0$) 的水壓力亦相等 $P_2 = P_3$ ，由此三個邊界條件可得三層之壓力分佈式：

$$P_1 = \rho g \cos \theta (h_1 + h_2 - y), \quad -\infty < x < \infty, h_2 \leq y \leq h_1 + h_2 \quad (13)$$

$$P_2 = \rho g \cos \theta (h_1 + h_2 - y), \quad -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq h_2 \quad (14)$$

$$P_3 = \rho g \cos \theta (h_1 + h_2 - y), \quad -\infty < x < \infty, -\infty < y \leq 0 \quad (15)$$

3. 無因次化之控制方程式

為將控制方程式無因次化，令 $u_1^* = \frac{u_1}{u_{\max}}$ ， $y^* = \frac{y}{h_1 + h_2}$ ，而 $u_{\max} = \frac{\rho g \sin \theta (h_1 + h_2)^2}{2\mu}$ ， u_{\max} 為傾斜裸露地薄層層流水表面上之最大流速，因此可把 (13) 式與上列各條件代入 (1) 式後，可將 (1) 式簡化為：

$$\frac{d^2 u_1^*}{dy^{*2}} = -2, \quad \frac{h_2}{h_1 + h_2} \leq y^* \leq 1 \quad (16)$$

再由 (16) 式求出通解：

$$u_1^* = -y^{*2} + C_1 y^* + C_2, \quad \frac{h_2}{h_1 + h_2} \leq y^* \leq 1 \quad (17)$$

C_1 、 C_2 為待定常數。

再令 $u_2^* = \frac{u_2}{u_{\max}}$ ， $\delta_2 = \frac{n_2}{k_{p2}} (h_1 + h_2)^2$ ，將之與 (14) 式代入 (9) 式，可得無因次之草層水流控制方程式為：

$$\frac{d^2 u_2^*}{dy^{*2}} - \delta_2 u_2^* + 2 = 0, \quad 0 \leq y^* \leq \frac{h_2}{h_1 + h_2} \quad (18)$$

由 (18) 式解出通解為：

$$u_2^* = C_3 e^{\sqrt{\delta_2} y^*} + C_4 e^{-\sqrt{\delta_2} y^*} + \frac{2}{\delta_2}, \quad 0 \leq y^* \leq \frac{h_2}{h_1 + h_2} \quad (19)$$

C_3 、 C_4 為待定常數。

同理，令 $u_3^* = \frac{u_3}{u_{\max}}$ ， $\delta_3 = \frac{n_3}{k_{p3}} (h_1 + h_2)^2$ ，代入 (11) 式可得土層之水流無因次控制方程式：

$$\frac{d^2 u_3^*}{dy^{*2}} - \delta_3 u_3^* + 2 = 0, \quad -\infty < y^* \leq 0 \quad (20)$$

而 (20) 式可求得通解為：

$$u_3^* = C_5 e^{\sqrt{\delta_3} y^*} + C_6 e^{-\sqrt{\delta_3} y^*} + \frac{2}{\delta_3}, \quad -\infty < y^* \leq 0 \quad (21)$$

C_5 、 C_6 為待定常數

4. 邊界條件

為求解 $C_1 - C_6$ 需將 (17)、(19) 與 (21) 式代入無因次化之邊界條件，而本文之邊界條件分別位於自由水面處 ($y^* = 1$)、草層與水層之交界面 ($y^* = \frac{h_2}{h_1+h_2}$)、地表面 ($y^* = 0$) 與土層之不透水底部 ($y^* \rightarrow -\infty$)，茲分別說明如下：

首先，將流體應力以用張量表示如下：

$$\underline{\underline{\sigma}}_{fi} = \begin{bmatrix} -n_i P_i + 2n_i \mu \frac{\partial u_i}{\partial x} & n_i \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) \\ n_i \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) & -n_i P_i + 2n_i \mu \frac{\partial v_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (22)$$

因考慮完全發展流，上式可改寫如下：

$$\underline{\underline{\sigma}}_{fi} = \begin{bmatrix} -n_i P_i & n_i \mu \frac{du_i}{dy} \\ n_i \mu \frac{du_i}{dy} & -n_i P_i \end{bmatrix} \quad (23)$$

(1) 在自由水面處 ($y = h_1 + h_2$)

由切線 (x) 方向流體應力連續，根據 (23)

式可知：

$$\sigma_{f_{yx1}} = \mu \frac{du_1}{dy} \quad (24)$$

由於自由水面處剪應力為零，(24) 式可改寫為：

$$\sigma_{f_{yx1}} = \mu \frac{du_1}{dy} = 0, \quad y = h_1 + h_2 \quad (25)$$

(25) 式無因次化後可得：

$$\frac{du_1^*}{dy^*} = 0; \quad y^* = 1 \quad (26)$$

(2) 水層與草層之交界面 ($y = h_2$)

由切線 (x) 方向流體應力連續，根據 (23)

式可知：

$$\sigma_{f_{yx2}} = \frac{\sigma_{f_{yx2}}}{n_2} \Rightarrow \mu \frac{du_1}{dy} = \mu \frac{du_2}{dy}, \quad y = h_2 \quad (27)$$

(27) 式無因次化後可得：

$$\frac{du_1^*}{dy^*} = \frac{du_2^*}{dy^*}, \quad y^* = \frac{h_2}{h_1+h_2} \quad (28)$$

由切線 (x) 方向流體速度連續，可得：

$$u_1 = n_2 u_2, \quad y = h_2 \quad (29)$$

(29) 式無因次化後可得：

$$u_1^* = n_2 u_2^*, \quad y^* = \frac{h_2}{h_1+h_2} \quad (30)$$

(3) 草層與土層之交界面 ($y = 0$)

由切線 (x) 方向流體應力連續，根據 (23) 式可知：

$$\sigma_{f_{yx2}} = \frac{\sigma_{f_{yx3}}}{n_2} \Rightarrow \mu \frac{du_2}{dy} = \mu \frac{du_3}{dy}, \quad y = 0 \quad (31)$$

(31) 式無因次化後可得：

$$\frac{du_2^*}{dy^*} = \frac{du_3^*}{dy^*}, \quad y^* = 0 \quad (32)$$

由切線 (x) 方向流體速度連續，可得：

$$n_2 u_2 = n_3 u_3, \quad y = 0 \quad (33)$$

(33) 式無因次化後可得：

$$n_2 u_2^* = n_3 u_3^*, \quad y^* = 0 \quad (34)$$

(4) 土層之不透水底部 ($y \rightarrow -\infty$)

切線 (x) 方向流體速度為零，可以表示為：

$$u_3 = 0, \quad y \rightarrow -\infty \quad (35)$$

另外無因次速度可以表示為：

$$u_3^* = 0, \quad y^* \rightarrow -\infty \quad (36)$$

5. 解析解

將各層之流速通解 (17) 式、(19) 式和 (21) 式代入各無因次邊界條件 (26)、(28)、(30)、(32)、(34) 及 (36) 式，可解出 $C_1 = 2$ 、 $C_6 = 0$ 以及四個方程式 (37)-(40) 式：

$$C_3 A e^{AD} - C_4 A e^{-AD} = 2(1 - D) \quad (37)$$

$$C_2 - C_3 n_2 \cdot e^{AD} - C_4 n_2 \cdot e^{-AD} = \frac{2n_2}{A^2} + D^2 - 2D \quad (38)$$

$$C_3 A - C_4 A - C_5 B = 0 \quad (39)$$

$$n_2 C_3 + n_2 C_4 - n_3 C_5 = 2 \left(\frac{n_3}{B^2} - \frac{n_2}{A^2} \right) \quad (40)$$

其中 $A = \sqrt{\delta_2}$ ， $B = \sqrt{\delta_3}$ ， $D = \frac{h_2}{h_1+h_2}$ ，將 (37)-(40) 式可聯立求解出 C_2 、 C_3 、 C_4 和 C_5 ，分別為：

$$C_2 = \frac{\left[\frac{4A^2n_2n_3 - 4B^2n_2^2 + 2A^2 \cosh(AD)(2Bn_2n_3 - 2BDn_2n_3) + 4ABn_2n_3 \sinh(AD)}{-4A^3BDn_3 \sinh(AD) - 4A^2B^2Dn_2 \cosh(AD) + 2A^3BD^2n_3 \sinh(AD) + 2A^2B^2D^2n_2 \cosh(AD)} \right]}{\left[\frac{A^2B(2Bn_2 \cosh(AD) + 2An_3 \sinh(AD)) + (B^2n_2^2(2AD - 2A + 2))}{\frac{B^2n_2^2e^{2AD}(2A - 2AD + 2)}{(A^2B(2Bn_2 \cosh(AD)e^{AD} + 2An_3 \sinh(AD)e^{AD}))}} \right]} \quad (41)$$

$$C_3 = \frac{2A^2n_3 - 2B^2n_2 + 2AB^2n_2e^{AD} + 2A^2Bn_3e^{AD} - 2AB^2Dn_2e^{AD} - 2A^2BDn_3e^{AD}}{(A^2B(Bn_2 - An_3 + An_3e^{2AD} + Bn_2e^{2AD}))} \quad (42)$$

$$C_4 = \frac{-(2e^{AD}AB^2n_2 - A^2Bn_3 - A^2n_3e^{AD} + B^2n_2e^{AD} - AB^2Dn_2 + A^2BDn_3)}{(A^2B(Bn_2 - An_3 + An_3e^{2AD} + Bn_2e^{2AD}))} \quad (43)$$

$$C_5 = \frac{(2A^2n_3 - 2B^2n_2 - 2A^2n_3e^{2AD} + 2B^2n_2e^{2AD} + 4AB^2n_2e^{AD} - 4AB^2Dn_2e^{AD}}{(AB^2(Bn_2 - An_3 + An_3e^{2AD} + Bn_2e^{2AD}))} \quad (44)$$

結果與討論

1. 流速分佈

本文藉由解析方式求得閉合形式 (closed form) 之無因次流速分佈式，除了將解析解之結果展示於圖表，並引用 Kubrak et al. (2008) 之實驗數據進行比較，其實驗使用橢圓柱狀體做為渠槽實驗中植生之代替品，橢圓柱截面之長軸長及短軸長分別為 0.00095 m 與 0.0007 m，高度為 0.163m，實驗設置如表 1， h_1 水層厚度為 0.1031m， h_2 草層高度為 0.163m， $s(= \tan\theta)$ 為 0.0087 草地坡度， m 為一平方公尺上的植株數。

由於實驗數據為有因次之流速值資料點，因此將實驗數據除以實驗數據之水面流速值，令 $u' = u/u_{\text{surface}}$ ， u 為實驗流速， u_{surface} 為各案例的水面流速值，而解析解之流速分佈也除以各案例之表面流速，使得流速分佈皆分佈於 0-1 之中，如圖 2 所示。由圖 2 顯示出 Kubrak et al. (2008) 實驗數據與本研究之解析解的流速分佈趨勢大致相同，但在 case 1-1 的草層中有明顯差異，實驗結果之流速較解析解的流速大，其原因為實驗流況之雷諾數較大而本文研究為低雷諾數流，所以在孔隙率較低、阻力較大時 (例如：case 1-1) 流速剖面之差異較孔隙率高、阻力較小時 (例如：case 1-2) 明顯。實驗數據中在接近地表處的流速梯度遠大於解析解之流速梯度，原因在於實驗流況為高雷諾數之紊流，動量交換的傳遞效應較好，速度分佈較平均，所以地表流速會很快就趨近一穩定值，反觀解析解在低雷諾數流況下之流速分佈，黏滯力的影響相較於實驗數據，其影響較大，因此草層流速受到邊界黏滯力作用，流速由地表隨 y 方向而緩慢增加，直到接近水草交界面，流速梯度才漸大。雖然在草層中的流速有所差異，但在水草交界面上兩者流速則相差不遠。另

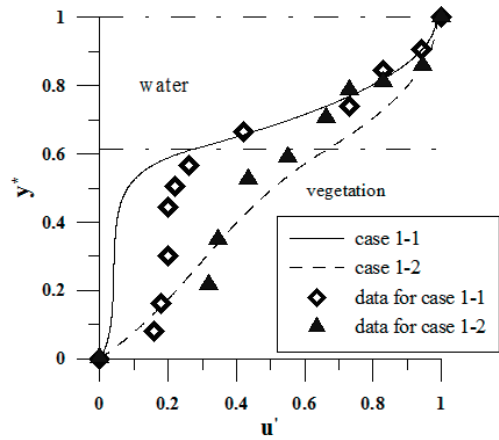


圖 2 解析解與實驗流速 (Kubrak) 比較圖 ($h_1 = 0.1031\text{m}$, $h_2 = 0.165\text{m}$)

Fig.2 Comparison of velocity distributions, between analytical solutions and experimental data ($h_1 = 0.1031\text{m}$, $h_2 = 0.165\text{m}$)

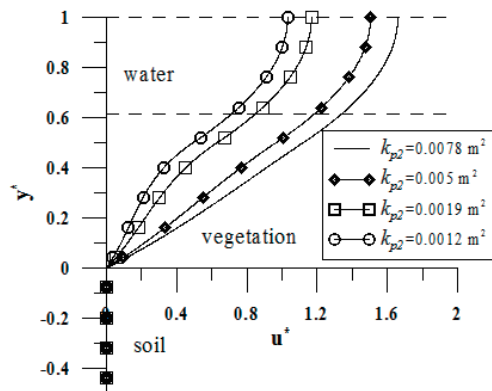


圖 3 高比滲透係數之流速分佈 ($10^{-3} \leq k_{p2} \leq 10^{-2}$, $s = 0.0087$, $h_1 = 0.1031\text{m}$, $h_2 = 0.165\text{m}$)

Fig.3 Distribution of flow velocity for large specific permeability ($10^{-3} \leq k_{p2} \leq 10^{-2}$, $s = 0.0087$, $h_1 = 0.1031\text{m}$, $h_2 = 0.165\text{m}$)

外, case1-1 的流速分佈在草層中接近水層的位置有明顯的反曲點, 而 case1-2 卻無明顯的反曲點, 由草層密度的觀點來研究此現象, 當草層孔隙率小至某一值, 草體對於流體所造成之阻力會使得流速明顯減小, 相對於上層之水層就會出現明顯的差異, 這樣的流速差異就反應在流速剖面線上產生反曲點, 而當 k_{p2} 值偏大時流速剖面呈現流速梯度變化不大之弧線, 圖 3 為高比滲透係數 (k_{p2} 約為 10^{-3} 左右) 之流速分佈圖, 雖然反曲點皆不明顯, 但此時 k_{p2} 越小時, 出現反曲點的現象也會越明顯, 圖 4 為低比滲透係數 (k_{p2} 約為 10^{-4} 左右) 之流速分佈圖, 圖 4 所呈現出的流速剖面則有相當明顯的反曲點。比較圖 3 與圖 4, 草層中草體密度增加, 對水流造成阻力而使草層之流速減小, 將 k_{p2} 與草層平均流速 u_{2m}^* 、水層平均流速 u_{1m}^* 及地表上之水流平均流速 u_m^* 之關係圖繪於圖 5, 呈現當 k_{p2} 值越小時, 平均流速皆會越小, 以總體之觀點言之, 草體所造成之阻力, 不僅影響草層之流速, 水層之速度也因此而減小。此外, 圖 5 中尚可發現當 k_{p2} 值越小時, 草層平均流速與水層平均流速的差距越大, 而水草兩層在平均流速相差不大之情況下反曲點的現象較難顯現, 因此 k_{p2} 值越大則草層流速分佈反曲點的現象越不明顯。

2. 流體剪應力分佈

由流體剪應力之定義 (45) 式依無因次參數的轉換 (46) 式可推得無因次的剪應力分佈 (47) 式:

$$\tau_i = \mu \frac{du_i}{dy} \quad (45)$$

$$\tau_i^* = \frac{\tau_i}{\rho g \sin \theta (h_1 + h_2)} \quad (46)$$

$$\tau_i^* = \frac{1}{2} \frac{du_i^*}{dy^*} \quad (47)$$

依照上一章節 Kubrak et al. (2008) 的實驗設置算出 case 1-1 與 case 1-2 之無因次剪應力分佈, 如圖 6, 水層之剪應力分佈由水面呈線性遞減至水土交界面, 草層之剪應力分佈則呈現與他層交界面之值較高, 草層中值較低之圓滑曲線, 在土層中因流速極小且在 y^* 方向變化極小, 因此剪應力除了底床表面之外幾乎等於零, 圖 6 亦呈現向右凸出之三個點 A、B 與 B', A 點為位於水草交界面上之剪應力, B 與 B' 則是位於地表上之剪應力, 其中 A 點又為 case 1-1 與 case 1-2 的最大剪應力, 剪應力分佈由 A 點向地表方向逐漸減小經過位於草層中之轉折點後增大至 B 或 B', 達另一極值。為了深入理解 A、B 與 B' 三點之特性, 將參數調整後 (參數設置如表 2 所示) 繪製剪應力分佈圖於圖 7, 圖中 case 2-1 與 case 2-2 的最大剪應力不全然存在於水、草交界面, case 2-2 的最大剪應力位於地表面上, 由此可推論水流經草地之流體剪應力分佈可分為三種類型: 1. 最大剪應力位於水、草交界面上, 2. 最大剪應力位於地表面上, 3. 最大剪應力同時存在於水、草交界面與地表面上。

本研究發現無因次參數 δ_2 決定了剪應力所呈現之類型, 其中第三種類型本文稱為一臨界狀態, 此種狀態下之最大剪應力可稱為臨界剪應力, 此時將 δ_2 參數值視為一個臨界值 δ_{c2} , 當 $\delta_2 > \delta_{c2}$ 時最大剪應力位於水、草交界面上; 相反地, 當 $\delta_2 < \delta_{c2}$ 時則最大剪應力位於地表上, δ_{c2} 值和水層深度與草層高度之比例有關, 在水層與草層厚度相等之狀態下, δ_{c2} 大約等於 9.5。此外也可發現臨界剪應力之大小隨著 h_1/h_2 的下降而遞減, 而 δ_{c2} 值則是隨著 h_1/h_2 的遞減而增加, 如表 3 所示。

表 1 流速測量之實驗設置 Kubrak et al. (2008)

Table 1 Basic set-up of the experiments of velocity measurements

Case 案例	h_1 (m) 水層深度	h_2 (m) 草層深度	s 坡度	m 植株數	n_2 草層孔隙率	n_3 土層孔隙率	k_{p2} (m ²) 草層之比滲透係數
1-1	0.1031	0.163	0.0087	10000	0.9948	0.5	3.07E-4
1-2	0.1031	0.163	0.0087	2500	0.9987	0.5	0.005

表 2 流體剪應力分佈之參數設置

Table 2 Parameters for fluid shear stress profile

Case 案例	h_1 (m) 水層深度	h_2 (m) 草層深度	s 坡度	m 植株數	n_2 草層孔隙率	n_3 土層孔隙率	δ_2 參數
2-1	0.1	0.1	0.0001	10000	0.9948	0.5	129.6
2-2	0.1	0.1	0.0001	2500	0.9987	0.5	8.037

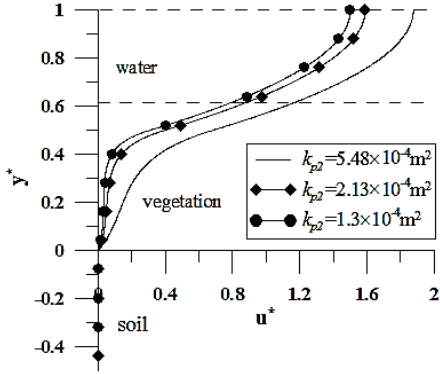


圖 4 低比滲透係數之流速分佈 ($10^{-3} < k_{p2} \leq 10^{-4}$, $s = 0.0087$, $h_1 = 0.1031\text{m}$, $h_2 = 0.165\text{m}$)

Fig.4 Distribution of flow velocity for small specific permeability ($10^{-3} < k_{p2} \leq 10^{-4}$, $s = 0.0087$, $h_1 = 0.1031\text{m}$, $h_2 = 0.165\text{m}$)

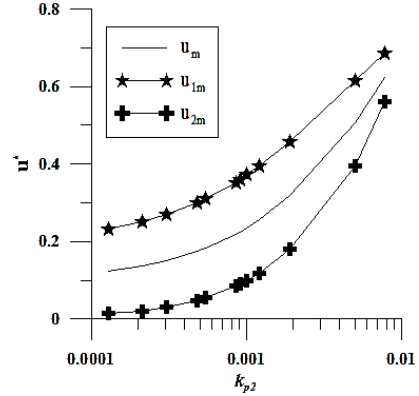


圖 5 k_{p2} 值與平均流速關係圖 ($s = 0.0087$, $h_1 = 0.1031\text{m}$, $h_2 = 0.165\text{m}$)

Fig.5 Distribution of flow mean velocity with k_{p2} ($s = 0.0087$, $h_1 = 0.1031\text{m}$, $h_2 = 0.165\text{m}$)

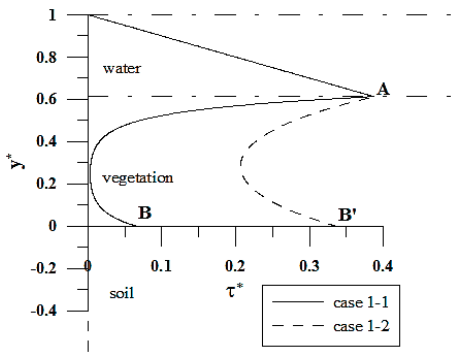


圖 6 不同草層孔隙率之流體剪應力分佈 (案例 1-1 與案例 1-2)

Fig.6 Profiles of fluid shear stress for different vegetation porosity (case 1-1 and case 1-2)

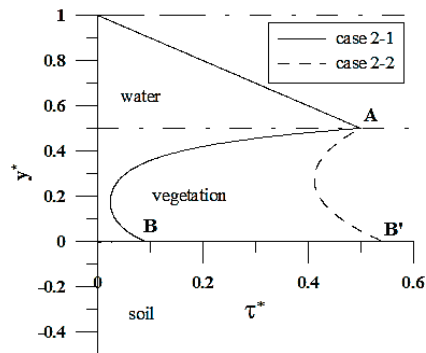


圖 7 不同草層孔隙率之流體剪應力分佈 (案例 2-1 與案例 2-2)

Fig.7 Profiles of fluid shear stress for different vegetation porosity (case 2-1 and case 2-2)

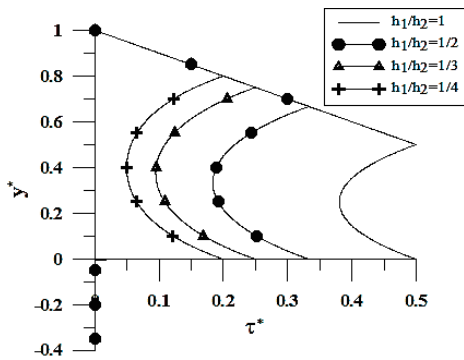


圖 8 不同 h_1/h_2 之臨界剪應力分佈

Fig.8 Profiles of critical shear stress for four different ratios of h_1 to h_2

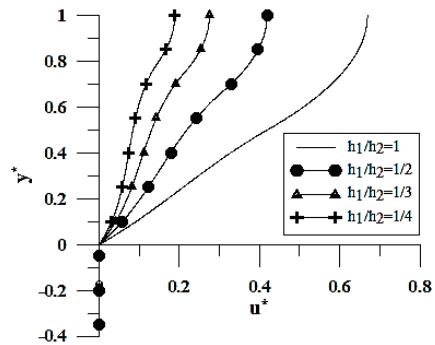


圖 9 在臨界狀態下不同 h_1/h_2 之流速分佈

Fig.9 Velocity profiles at critical condition for different ratios of h_1 to h_2

圖 8 為不同水、草層厚度比在臨界狀態下之剪應力分佈，水層之剪應力在所有案例中皆重合，均為斜率為 $-1/2$ 的直線，因此水層之剪應力分佈不受草層孔隙率或是水深之影響，水層之剪應力皆由水面線性遞增至水、草交界面。草層之最小剪應力位於草層之中央，而草層內之最小剪應力隨著水、草層厚度比增加而增加。圖 9 為對應圖 8 各曲線之流速分佈圖，其中 $h_1/h_2=1$ 的流速分佈曲線之速度梯度較其他案例的速度梯度大，因此剪應力也都遠大於其他案例。

四、結 論

本研究呈現以孔隙介質流理論為主軸，佐以解析方法分析水流流經草地水理狀態之學術研究，藉著假設合理之條件，並將控制方程式與邊界條件無因次化，以精簡演算過程，求得一個簡單、有效之數學模式來計算流速分佈和剪應力分佈，整理後可歸納出下列之結果：

1. 將流速分佈與 Kubrak et al. (2008) 之實驗數據做驗證，兩者具有相同之趨勢，尤其在水層中結果更是接近，本研究之解析解提供了一個簡潔而有效之方法來預測水流流經草地之流速分佈。當草層之比滲透率 k_{p2} 約小於 0.001 時，在草層中流速分佈會出現明顯之反曲點，平均流速則隨著 k_{p2} 之增加而增加。
2. 水、草、土三層之流體剪應力分佈中，在土層之流體剪應力幾乎皆趨近於零，草層則呈向負 x 方向凸出之圓滑曲線，水層之剪應力分佈則是呈線性分佈。流體剪應力分佈圖依 δ_2 可分為三種類型：
 - (1) 當 $\delta_2 > \delta_{c2}$ 時，最大剪應力位於水、草交界面上，
 - (2) 當 $\delta_2 < \delta_{c2}$ 時，最大剪應力位於地表面上，
 - (3) 當 $\delta_2 = \delta_{c2}$ 時，最大剪應力同時存在於水、草交界面與地表面上。

3. 當水層厚度與草層厚度相等（見圖 8），表示在草、土交界面上之流體剪應力等於地表之流體剪應力，且為最大剪應力，此時之 $\delta_2 = \delta_{c2}$ ， δ_{c2} 會隨著水層厚度與草層厚度之比值下降而增加，而臨界剪應力會隨著水層厚度與草層厚度之比值下降而遞減。

參考文獻

1. 宋長虹 (1993), 「水波作用下多孔彈性底床動力反應之研究」, 博士論文, 台灣大學土木工程學研究所, 台北。(Song, C.H. (1993). *Dynamic response of water waves on a poroelastic bed*, doctoral dissertation, Department of Civil Engineering, National Taiwan University, Taipei, Taiwan. (in Chinese))
2. Biot, M.A., and Willis, D.G. (1957). "The Elastic coefficients of the Theory of Consolidation." *Journal of Applied Mechanics*, 594-601.
3. Biot, M.A. (1956a). "Theory of Propagation Elastic Waves in a Fluid Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range." *Journal of Acoustical society of America*, 28, 168-178.
4. Biot, M.A. (1956b). "Theory of Propagation Elastic Waves in a Fluid Saturated Porous Solid. II. High-Frequency Range." *Journal of Acoustical society of America*, 28, 179-191.
5. Biot, M.A. (1962). "Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media." *Journal of Physics*, 33, 1482-1498.
6. Chen, S.C., Kuo, Y.M., and Li, Y.H. (2011). "Flow characteristics within different configuration of submerged flexible vegetation." *Journal of Hydrology*, 398, 124-134.
7. Chiu, C.L. (1986). "Entropy and probability concepts in hydraulic." *Journal of Hydraulic Engineering*, 113(5), 583-600.
8. Huai, W.X., Chen, Z.B., and Han, J. (2009). "Mathematical model for the flow with submerged and emerged rigid vegetation." *Journal of Hydrodynamics*, 21(5), 722-729.
9. Järvelä, J. (2002). "Flow resistance of flexible and stiff vegetation: a flume study with natural plants." *Journal of Hydrology*, 269, 44-54.
10. Kubrak, E., Kubrak, J., and Rowiński, P.M. (2008). "Vertical velocity distributions through and above submerged, flexible vegetation." *Journal of Hydrological Sciences*, 53(4), 905-920.

表 3 臨界條件下不同 h_1/h_2 之各項參數

Table 3 Parameters with different ratios of h_1 to h_2 at critical condition

h_1 (m)	h_2 (m)	h_1/h_2	m_c	τ_c	δ_{c2}
水層深度	草層深度	水、草層 水深比	臨界 植株數	臨界草層 剪應力	臨界參數
0.1	0.1	1	2724	0.5	9.5
0.1	0.2	1/2	2120	0.33	13
0.1	0.3	1/3	1912	0.25	18.8
0.1	0.4	1/4	1729	0.2	26.9

11. Sand-Jensen, K., and Pedersen, O. (1999). "Velocity gradients and turbulence around macrophyte stands in streams." *Freshwater Biology*, 315-328.
 12. Wu, W. (2007). "Effects of Vegetation on Flow and Sediment Transport." in *Computational River Dynamics*. Taylor & Francis e-Library, 375-381.
-

2011年12月05日 收稿

2011年12月29日 修正

2012年01月03日 接受

(本文開放討論至 2012 年 12 月 31 日)