

同心圓柱間賓漢流體穩態流況之研究

劉格非 吳映昕*

摘要 本研究推導賓漢流體在兩個無限長同心圓柱間的穩態流況。為了模擬一般流變儀由中心旋轉的運動，本研究假設外圓柱靜止不動，而內圓柱是以固定轉速 Ω 轉動。流體假設為黏滯性跟降伏應力不隨時間改變的簡單賓漢流體。由於有降伏應力的存在，理論可得一臨界轉速 Ω_{cr} ，大於此臨界轉速，流體內的剪力全部大於降伏應力，反之，則有塞流 (plug flow) 存在。最後，本研究還分析無因次參數圓柱半徑比和賓漢數對流況的影響，且將結果應用於流變參數之檢定。

關鍵詞：賓漢流體、同心圓柱、流變參數。

Steady Motion of Bingham Fluid Contained Between Two Concentric Cylinders

Ko-Fei Liu Ying-Hsin Wu*

ABSTRACT Steady motion of Bingham fluid between two concentric cylinders is investigated in this paper. The inner cylinder rotates at a constant speed with the outer cylinder stationary. There is a critical rotational speed Ω_{cr} which exists due to the yield stress. If rotating speed exceeds the critical one, fluid stress within the whole gap is greater than the yield stress. Plug flow exists only for the rotating speed below Ω_{cr} . The effect of the ratio between radii and Bingham number is discussed. The limiting case that two cylinders are very close is also discussed. Finally, the rheological parameters calibration formulas are derived.

Key Words : Bingham fluid, concentric cylinders, rheological parameters.

一、前言

本研究主要用理論推導賓漢流體在兩垂直同心圓柱間穩態運動的情形，並討論此理論在流變參數檢定上之應用。從十九世紀中，同心圓柱間流體運動的問題就開始受到重視。Couette 解出牛頓流體的穩態解，隨後 Taylor (1923) 討論在不同轉速下牛頓流體不穩定的流況，並找出 Taylor 渦流 (vortex)。此外，在流變學的應用上，流體在兩同心圓柱間之設計為黏度計中常見的幾何形狀。除了牛頓流體的流變參數檢定外，前

人亦有研究非牛頓流體在同心圓柱間的流況，其中包括 Toorman (1994) 研究非理想賓漢流體的流速跟應變率分佈，但該文並無考慮弱剪層存在的情況。Joye (2003) 則是研究了 Casson 流體的應變率和黏滯性的關係；Kelessidis and Maglione (2006) 亦用 Casson 流體的模式來討論流變參數；Chatzimina et al. (2009) 則推導出 Herschel-Bulkley 流體在邊壁上的剪應變率。到目前為止還沒有人完整的解出賓漢流體在同心圓柱間的穩態流況，因此本研究將用解析的方式求出所此流況的理論解。

本文將無限長兩垂直同心圓柱間的非觸變性 (non-thixotropic) 賓漢流體, 視為一水平二維的問題, 圓柱與座標的關係如圖 1 所示, 其中 θ 朝逆時針方向為正。外圓柱 (半徑為 R_2) 固定在空間中靜止不動, 而內圓柱 (半徑為 R_1) 以一固定轉速 Ω 朝逆時針方向轉動來帶動兩圓柱間流體的運動, 因此流速在內圓柱的邊界上有最大值。由於存在一降伏應力 (yield stress), 液體承受之剪應力若低降伏應力, 液體是不會有應變率, 所以當 Ω 不夠大, 不足以帶動全部流體時, 賓漢流體在靠近外圓柱的部分會靜止不動, 此部分稱為弱剪層 (plug layer), 而靠近內圓柱有流動的部分則稱為強剪層 (shear layer), 強剪層的厚度定義為 δ (如圖 1 所示)。強弱剪層同時存在的流況, 本文稱為「弱剪層存在之流況」。隨著轉速 Ω 越大強剪層也隨著變厚, 當轉速超過臨界轉速 Ω_{cr} 時, 全部流體都會被內圓柱所帶動而處於強剪層中, 此流況則定義為「無弱剪層之流況」。首先我們將分別推導這兩種狀況的流速分佈, 且由理論找出判別此兩種流況之臨界轉速 Ω_{cr} 。接著, 圓

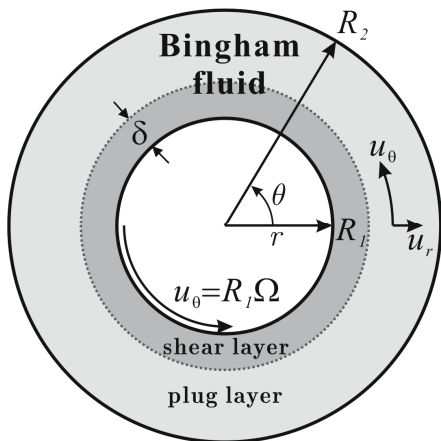


圖 1 幾何形狀與座標示意圖。Bingham fluid：賓漢流體；plug layer、shear layer：弱剪和強剪層； R_1 、 R_2 ：內外圓柱半徑； δ ：強剪層的厚度； u_r 、 u_θ ： r 和 θ 方向的流速；內圓柱以定轉速 Ω 朝逆時針方向轉動，外圓柱固定不動。

Fig.1 Geometry of two cylinders and coordinate system. The clockwise direction of θ is defined as positive. The radii of the inner and outer cylinders are R_1 and R_2 respectively; δ is shear layer thickness, u_r and u_θ are radial and angular velocity respectively. The inner cylinder rotates counterclockwise at a constant rotational speed Ω and the outer cylinder is stationary

柱半徑比和賓漢數對流況的影響, 圓柱間距趨近極大或極小的情況都會做分析與討論。

最後, 本文將用理論解與最小平方法 (Least-square method), 來推導賓漢流體之流變參數—黏滯係數和降伏應力的檢定公式。

二、基本理論

1. 控制方程式

控制方程式為二維水平圓柱座標下的質量和動量守恆方程式。由於固體邊界形狀為兩同心圓且僅考慮穩態的情形, 因此可假設流況為軸對稱之運動, 化簡之質量與動量守恆方程式如下：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) = 0 \tag{1}$$

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \rho \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \tag{2}$$

$$u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \rho \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tau_{\theta r}) \tag{3}$$

其中, ρ 為常數液體密度, P 為壓力, u_r 和 u_θ 分別為 r 和 θ 方向的流速。剪力與應變率之關係以賓漢流體的本構關係張量式表示為：

$$\text{強剪層} (|\tau| \geq \tau_0) : \tau_{ij} = \left(\frac{\tau_0}{E} + 2\mu \right) e_{ij} \tag{4}$$

$$\text{弱剪層} (|\tau| < \tau_0) : E = 0 \tag{5}$$

$$\text{其中, } i, j = r, \theta \text{ 且 } E = \left(\frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} \right)^{1/2}, \quad |\tau| = \left(\frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ij} \right)^{1/2}$$

$$\text{和 } e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

τ_0 和 μ 分別為降伏應力和動力黏滯係數 (dynamic viscosity), 在此皆假設為常數; e_{ij} 為應變率張量。(4) 式表示當剪力大於降伏應力時的本構關係, 滿足此條件的區域稱為強剪層;(5) 式為剪力小於降伏應力時之本構關係, 滿足此條件的區域稱為弱剪層。由於本構關係的不連續, 因此流速剖面的斜率, 在強弱剪層兩交界處不一定連續。通常需要找出兩區域間的界線, 將強弱兩區分開處理。由於強剪層的厚度定義為 δ , 因此強弱兩區的交界位置是 $R_1 + \delta$, 而在此交界面上的剪力等於降伏應力且流速要連續。其它邊界條件還有在內外圓柱的表面為不滑動 (no-slip), 所有邊界條件如下：

$$\text{內圓柱 } (r = R_1) : u_r = 0 \text{ 和 } u_\theta = R_1 \Omega \tag{6}$$

$$\text{強弱剪交界 } (r = R_1 + \delta) : E = 0 \text{ 或 } |\tau| = \tau_0 \quad (7)$$

$$\text{外圓柱 } (r = R_2) : u_r = u_\theta = 0 \quad (8)$$

其中，強剪層的厚度 δ 介於 0 跟 $R_2 - R_1$ 之間。

由質量守恆方程式 (1) 與 no-slip 條件 (6) 可得 $u_r \equiv 0$ ，此結果代入動量方程式 (2) 和 (3) 後分別得

$$-\rho \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (9)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{\theta r}) \quad (10)$$

接著將 (9) 式對 r 積分一次後得到壓力為

$$p = \rho \int \frac{u_\theta^2}{r} dr = p(r) + P(\theta) \quad (11)$$

由於運動為軸對稱，只有壓力之相對大小會影響流況，因此可令積分常數 $P \equiv 0$ ，再把 (11) 式代入 (10) 式可得

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{\theta r}) \quad (12)$$

(12) 式為化簡後之動量方程式，且不管在強剪或弱剪層都適用。接著將 $u_r = 0$ 代入本構關係式，可知強剪層中 $\tau_{rr} = \tau_{\theta\theta} = 0$ 只剩 $\tau_{\theta r}$ 分量，且 (4) 和 (5) 式經過整理變成

$$\text{強剪層 } (\tau_{\theta r} \geq \tau_0) : \tau_{\theta r} = \tau_{\theta r} = \tau_0 \text{sgn}(e_{\theta r}) + \mu e_{\theta r} \quad (13)$$

$$\text{弱剪層 } (\tau_{\theta r} < \tau_0) : |e_{\theta r}| = 0 \quad (14)$$

其中

$$e_{\theta r} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right)$$

在本問題中，因為內圓柱轉動而外圓柱靜止，因此隨著 r 增加則 u_θ 會越小，所以 $\text{sgn}(e_{\theta r}) = -1$ ，(13) 式變成

$$\tau_{\theta r} = -\tau_0 + \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \quad (15)$$

而負號代表外圈對內圈的流體，施予的剪力為順時鐘方向。強弱剪交界的邊界條件 (7) 式變成

$$\left| r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right| = 0 \text{ 和 } \tau_{\theta r} = -\tau_0 \text{ 當 } r = R_1 + \delta \quad (16)$$

其中，降伏應力前之負號表示流體受到的剪力朝順時針方向同 (15) 式。至此，化簡過的動量方程為 (12) 式，(15) 式與 (14) 式分別為化簡之強剪和弱剪層的本構關係式。

2. 無因次化

無因次變數定義如下：

$$(u_\theta^*, \tau_{\theta r}^*, r^*) = \left(\frac{u_\theta}{R_1 \Omega}, \frac{\tau_{\theta r}}{\mu \Omega}, \frac{r}{R_1} \right) \quad (17)$$

所有 * 號代表無因次的變數。本問題三個重要的無因次參數如下：

$$\beta = \frac{\delta}{R_1}, \alpha = \frac{R_2}{R_1} \text{ 和 } B = \frac{\tau_0}{\mu \Omega} \quad (18)$$

β 為無因次強剪層厚度且 $\beta \in [0, R_1/R_2 - 1]$ 。因為無因次的內圓柱位置為 $r^* = 1$ ，所以無因次後的強剪與弱剪兩層交界的位置為 $1 + \beta$ ； α 則為無因次的外圓柱位置，又可視為外圓柱和內圓柱半徑之比值（往後簡稱半徑比），且 $\alpha > 1$ ； B 定義為賓漢數 (Bingham number)，代表降伏應力除以剪力的比值，亦可視為無因次化的降伏應力。

將方程式無因次化後，為了簡潔將省略所有 * 號，所以下除非特別說明，不然僅討論無因次的變數。

θ 方向之無因次動量方程式為

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{\theta r}) \quad (19)$$

賓漢本構關係式為

強剪層 ($|\tau| \geq \tau_0$) :

$$\tau_{\theta r} = -B + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \quad \text{當 } 1 \leq r \leq 1 + \beta \quad (20)$$

$$\text{弱剪層} : \left| r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right| = 0 \quad \text{當 } 1 + \beta \leq r \leq \alpha \quad (21)$$

無因次的邊界條件為：

$$\text{內圓柱 } (r = 1) : u_\theta = 1 \quad (22)$$

強弱剪交界 ($r = 1 + \beta$) :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = 0 \text{ 和 } \tau_{\theta r} = -B \quad (23a,b)$$

$$\text{外圓柱 } (r = \alpha) : u_\theta = 0 \quad (24)$$

如圖 2，(I) 表示有弱剪層的情況，將使用 (21) 式搭配外圓柱 (24) 和強弱剪交界 (23a,b) 式的邊界條件來解弱剪層內的運動情形，而強剪層的流況則由 (19) 和 (20) 式搭配內圓柱 (22) 式和強弱剪交界 (23a,b) 之條件來求解。如果沒有弱剪層，則如圖 2(II)，僅需要使用 (19) 和 (20) 式搭配內圓柱 (22) 式和外圓柱 (24) 式之條件來求解即可。

三、穩態流況解

在本問題中，無論是否有弱剪層的存在，剪力的控制方程皆為 (19) 式，所以整個流體的剪力分布為

$$\tau_{\theta r} = \frac{C_1}{r^2} \quad \text{當 } 1 \leq r \leq \alpha \quad (25)$$

C_1 為積分常數，在不同的流況需要由不同的邊界條件來決定。(25) 式表示剪力與 r^2 成反比，離內圓柱越遠剪力越小。

由弱剪層的本構關係 (21) 式可得弱剪層中 $u_\theta = Kr$ ，其中 K 為常數，再配合 (24) 式之邊界條件可得

$$u_\theta = 0 \quad \text{當 } 1 + \beta \leq r \leq \alpha \quad (26)$$

因此只要有弱剪層之情況，弱剪層中之流體為靜止。因為強弱剪交界面上流速必須連續，故強剪層流速之邊界條件可寫為

$$u_\theta = 0 \quad \text{當 } \begin{cases} r = 1 + \beta & (\text{有弱剪層}) \\ r = \alpha & (\text{無弱剪層}) \end{cases} \quad (27)$$

因為邊界條件之差異，將分別推導 (I) 弱剪層存在和 (II) 無弱剪層的兩種流況。

1. 弱剪層存在之流況

首先，將強弱剪交界面之邊界條件 (23b) 代入 (25) 式得到剪力分佈如下：

$$\tau_{\theta r} = -\frac{B(1+\beta)^2}{r^2} \quad 1 \leq r \leq \alpha \quad (28)$$

由 (28) 式與強剪層本構關係 (20) 式和內圓柱上的 no-slip 條件 (22) 式，可得到強剪層內的流速分佈

$$u_\theta = r + Br \left(\ln r + \frac{(1+\beta)^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) \right) \quad (29)$$

當 $1 \leq r \leq 1 + \beta$

從 (29) 式可知流速除了線性分佈的部分外，非線性的變化受賓漢數 B 與強剪層厚度 β 的影響。

將 (27) 式代入 (29) 式經過整理可得賓漢數 B 與強剪層厚度 β 的關係：

$$\frac{1}{B} = \frac{(1+\beta)^2}{2} - \frac{1}{2} - \ln(1+\beta) \quad (30)$$

將其回復成有因次的方程式如下：

$$\frac{\mu\Omega}{\tau_0} = \frac{(R_1 + \delta)^2}{2R_1^2} - \frac{1}{2} - \ln\left(1 + \frac{\delta}{R_1}\right) \quad (31)$$

由 (31) 式可知在相同賓漢流體中，當內圓柱轉速 Ω 越小時，強剪層厚度 δ 會越小。另一方面，當 Ω 固定不變時，降伏應力 τ_0 越大或黏滯性 μ 越小的流體，強剪層厚度 δ 也會越小。在圓柱半徑都固定時，把內圓柱轉速 Ω 漸增，直到強剪層的厚度 δ 等於內外圓柱的間距 ($R_2 - R_1$)，弱剪層剛好消失，此轉速就定義為臨界轉速 Ω_{cr} ，其所對應的賓漢數 B 則定義為臨界賓漢數 B_{cr} ，可將 $\beta = \alpha - 1$ 代入 (30) 式得到的 B_{cr} 為：

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1) - \ln\alpha, \quad \text{其中 } B_{cr} = \frac{\tau_0}{\mu\Omega_{cr}} \quad (32)$$

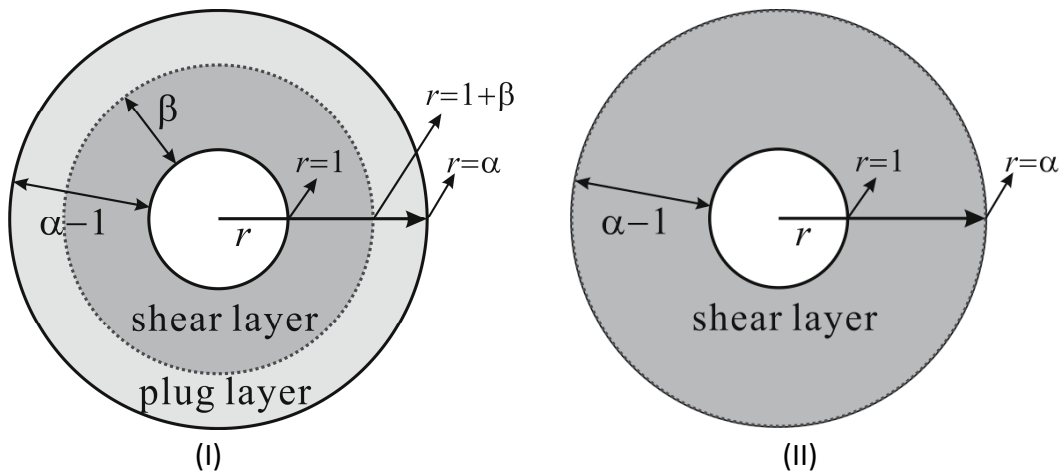


圖 2 流況示意圖，(I) 弱剪層存在之流況；(II) 無弱剪層之流況。

Fig.2 Schematic flow conditions. Left figure, (I), is for the flow condition with plug layer; Right one, (II), is for the one without plug layer

由於 α 為半徑比，因此只要知道兩圓柱的比值，就可由上式求得臨界賓漢數 B_{cr} 。(32) 式中 B_{cr} 和 α 之關係如圖 3 所示。從 (18) 式賓漢數 B 的定義來看，在固定 α 且相同流體中，內圓柱轉速 Ω 越大則 B 越小，因此當 $\Omega > \Omega_{cr}$ 時其所對應的是 $B < B_{cr}$ 。圖 3 中下半部灰色的範圍就是代表無弱剪層之流況。圖 3 上半部則代表弱剪層存在之流況。此外，由圖 3 可知當兩圓柱很靠近時，即 $\alpha = 1$ 則 $B_{cr} \rightarrow \infty$ ，因為即使很少的轉速 ($\Omega \ll 1$) 都可以使整體流動。另外，當 α 越大即外圓柱愈遠，則需要愈大的轉速，才能讓全部流體動起來，故 B_{cr} 越小。

2. 無弱剪層之流況

當內圓柱的轉速超過 Ω_{cr} 時，兩圓柱間僅強剪層存在，此時剪力的分佈不同於 (28) 式，需先求解強剪層內的流速，由 (25) 式和 (20) 式可得

$$u_{\theta} = Br \ln r - \frac{C_1}{2r} + C_2 r \quad \text{當 } 1 \leq r \leq \alpha \quad (33)$$

其中 C_1 和 C_2 為積分常數。利用內外圓柱的 no-slip 條件 (22) 式和 (24) 式，分別代入 (33) 式經過整理可得到

$$C_1 = -\frac{2\alpha^2(1+B \ln \alpha)}{\alpha^2 - 1} \quad (34)$$

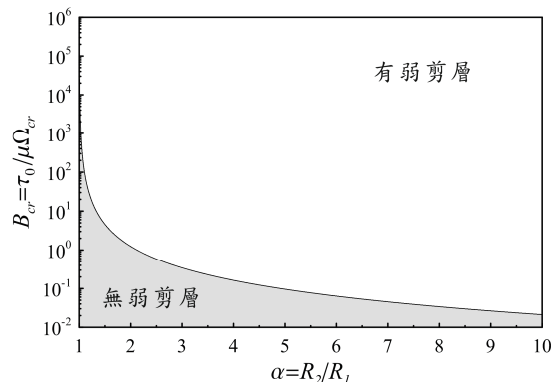


圖 3 臨界賓漢數 B_{cr} (Ω_{cr} 為臨界轉速) 和圓柱半徑比 α 之關係圖，圖中由線由 (32) 式決定，上下半部分別為「有弱剪層存在」與「無弱剪層」之流況

Fig.3 Relation between critical Bingham number B_{cr} ($=\tau_0/\mu\Omega_{cr}$, where Ω_{cr} is the critical rotational speed) and the radius ratio α , as given by Eq. 32. The upper and lower zones represent the flow condition with and without plug layer respectively

$$C_2 = -\frac{1+B\alpha^2 \ln \alpha}{\alpha^2 - 1} \quad (35)$$

再將這兩個常數代回 (25) 式和 (33) 式得到的剪力與流速的分佈如下：

$$\tau_{\theta r} = -\frac{2\alpha^2(1+B \ln \alpha)}{\alpha^2 - 1} \frac{1}{r^2} \quad (36)$$

$$u_{\theta} = \frac{1}{\alpha^2 - 1} \left(\frac{\alpha^2}{r} - r \right) + B \left(r \ln r + \frac{\alpha^2 \ln \alpha}{\alpha^2 - 1} \left(\frac{1}{r} - r \right) \right) \quad (37)$$

其中， $1 \leq r \leq \alpha$ 。因此剪力與流速分佈皆與賓漢數 B 和半徑比 α 有關。流速 (37) 式的正確性可由兩部分來驗證，首先 (37) 式與 Chatzimina et al. (2009) 所得到的結果相同；另外，將 (37) 式轉換回有因次的方程式，且令 $\tau_0 = 0$ 得到流速分佈如下：

$$u_{\theta} = \frac{\Omega R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} - \frac{\Omega R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r \quad (38)$$

則與牛頓流體在同心圓柱間之流速分佈 (Yih, 1979) 相同，表示 (37) 式無誤。

至此，在 (I) 弱剪層存在與 (II) 無弱剪層之所有流況已解完。接著，我們將討論賓漢數 ($B = \tau_0/\mu\Omega$) 與半徑比 ($\alpha = R_2/R_1$) 對流況的影響，也就是當兩圓柱之間距很小或很大時的流況做分析與近似解，即對 α 進行極端值分析。

四、分析與討論

1. 賓漢數 ($B = \tau_0/\mu\Omega$) 的影響

為了瞭解賓漢數 B 對流況的影響，本小節將固定圓柱半徑比為 2 ($\alpha = R_2/R_1 = 2$) 由 (32) 式可得臨界賓漢數 $B_{cr} = 1.24$ ，因此討論 B 值分別為 10.0、5.0、2.5、1.24 (B_{cr})、0.6、0.3 和 0 的流速與剪力分佈情形。 $B=10.0$ 、5.0 和 2.5 為弱剪層存在之流況； $B=1.24$ 、0.6、0.3 和 0 則為無弱剪層之流況。

不同賓漢數 B 對應的流速分佈請見圖 4。當弱剪層存在時，降伏應力 τ_0 與黏滯係數 μ 固定的情形下， B ($=\tau_0/\mu\Omega$) 越大 (即內圓柱轉速 Ω 越小) 時，能被內圓柱帶動的流體範圍就越小，因此強剪層的厚度就越薄，此趨勢可見於圖 4。當 $B=0$ 時代表著降伏應力的效應遠小於黏滯力的流況，其也可視為牛頓流體的流況。

接下來討論不同賓漢數 B 對剪力分佈的影響。在此仍然用外圓柱半徑是內圓柱兩倍 ($R_2 = 2R_1$) 之條件, (28) 與 (36) 式經過因次還原, 保留無因次的賓漢數 B 後可得到

$$\frac{\tau_{\theta r}}{\tau_0} = \begin{cases} -\frac{(R_1 + \delta)^2}{r^2} & \text{(有弱剪層)} \quad (39) \\ -\frac{8(1+B \ln 2)}{3B} \left(\frac{R_1}{r}\right)^2 & \text{(無弱剪層)} \quad (40) \end{cases}$$

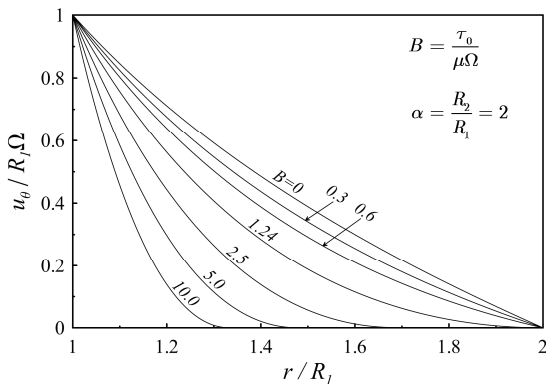


圖 4 半徑比 $\alpha = 2$ 時, 不同賓漢數 B 對應的流速分佈圖 ($B = 1.24$ 為 $\alpha = 2$ 時之臨界賓漢數 B_{cr} ; $r/R_1 = 1$ 和 2 分別代表內、外圓柱的位置)

Fig.4 The velocity profiles of different Bingham number B with radius ratio $\alpha = 2$. The critical Bingham number B_{cr} is 1.24 as $\alpha = 2$. The locations of inner and outer cylinders are at $r/R_1 = 1$ and 2 respectively

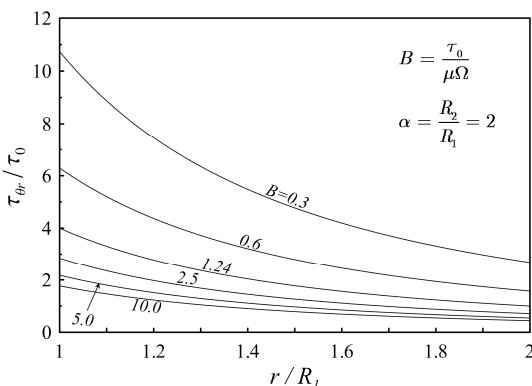


圖 5 半徑比 $\alpha = 2$ 時, 不同賓漢數 B 所對應的剪力分佈圖 ($B = 1.24$ 為 $\alpha = 2$ 時之臨界賓漢數 B_{cr} ; $r/R_1 = 1$ 和 2 分別代表內、外圓柱的位置)

Fig.5 The shear stress profiles of different Bingham number B with radius ratio $\alpha = 2$. The critical Bingham number B_{cr} is 1.24 as $\alpha = 2$. The locations of inner and outer cylinders are at $r/R_1 = 1$ and 2 respectively

其中, $R_1 \leq r \leq 2R_1$ 且 $(R_1 + \delta)^2$ 之值的大小可由 (31) 式求得。將 (39) 式和 (40) 式於不同的賓漢數 B 下的剪力分佈繪於圖 5。特別注意的是當 $B (= \tau_0/\mu\Omega) = 0$ 時, 即代表降伏應力 $\tau_0 = 0$ 的狀況, (40) 式中無因次剪力值趨近無窮大, 因此將省略而不繪於圖 5 中。對降伏應力 τ_0 與黏滯係數 μ 固定不變之流體而言, 內圓柱轉速 Ω 越小 (即賓漢數 $B = \tau_0/\mu\Omega$ 越大) 時, 流體在內圓柱上所受的剪力就越小, 此趨勢可見於圖 5。

2. 圓柱半徑比 ($\alpha = R_2/R_1$) 的影響

本節將在固定賓漢數 ($B = \tau_0/\mu\Omega = 1$) 下, 討論半徑比 ($\alpha = R_2/R_1$) 分別為 10.0、5.0、2.5、2.12、1.75、1.5 和 1.1 時對流況的影響。由 (32) 式可知臨界賓漢數 $B_{cr} = 1$ 所對應的半徑比 $\alpha = 2.12$, 即當外圓柱的半徑小於或等於內圓柱的 2.12 倍 ($R_2 \leq 2.12R_1$) 時, 兩圓柱間的流體將全部處於強剪層內, 因此 $\alpha = 2.12$ 、1.75、1.5 和 1.1 為無弱剪層之流況; $\alpha = 2.5$ 、5.0 及 10.0 則屬於弱剪層存在之流況。

不同的 α 所對應之流速分佈可見於圖 6。當兩圓柱很接近 ($\alpha \rightarrow 1$) 時, 流速剖面呈線性分佈, 如圖 6 中 $\alpha = 1.1$ 之線段。隨著兩圓柱間距增加 (即 α 越大) 流速分佈開始呈曲線, 當外圓柱半徑 R_2 大於或等於內圓柱半徑 R_1 的 2.12 倍後 (即半徑比 $\alpha = R_2/R_1 \geq 2.12$), 流速分佈不再改變, 此趨勢參見圖 6。對於降伏應力 τ_0 與黏滯係數 μ 不變的流體而言, 固定的內圓柱轉速 Ω (即賓漢數 $B = \tau_0/\mu\Omega = 1$ 固定不變) 無法帶動 $r \geq 2.12 R_1$ 處的流體運動, 因此半徑比 ($\alpha = R_2/R_1$) 大於 2.12 後, 外圓柱的位置不影響流速分佈。

接著來看不同半徑比 α 對剪力分佈的影響, 首先將 (28) 與 (36) 式經過因次還原, 保留無因次半徑比 α 並代入賓漢數 $B=1$ 之條件, 經過整理得到

$$\frac{\tau_{\theta r}}{\tau_0} = \begin{cases} -\frac{(R_1 + \delta)^2}{r^2} & \text{(有弱剪層)} \quad (41) \\ -\frac{2\alpha^2(1 + \ln \alpha)}{\alpha^2 - 1} \left(\frac{R_1}{r}\right)^2 & \text{(無弱剪層)} \quad (42) \end{cases}$$

其中, $R_1 \leq r \leq \alpha R_1$ 且 $(R_1 + \delta)^2$ 之值同樣可由 (31) 式求得。利用 (41) 或 (42) 式將不同半徑比 α 對應的剪力分佈繪於圖 7。當兩圓柱越接近 (即 α 越小) 時, 流體於內圓柱上所受之剪力就越大。當外圓柱半徑 R_2 大於內圓柱半徑 R_1 的 2.12 倍後 (即 $\alpha \geq 2.12$), 內圓柱上之剪力和兩圓柱間的剪力分佈都將固定不變, 此趨

勢請參見圖 7。另外，當兩圓柱很接近 ($\alpha \rightarrow 1$) 時，剪力也呈線性分佈，如圖 7 上 $\alpha = 1.1$ 之線段。

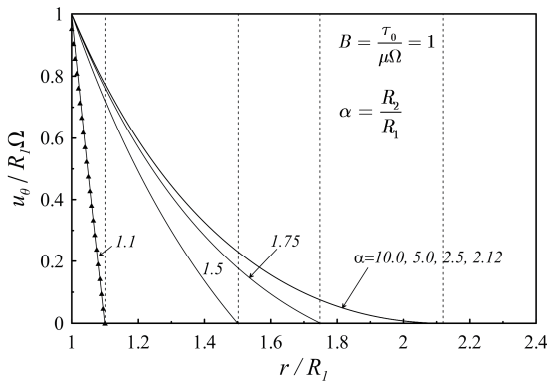


圖 6 賓漢數 $B=1$ 時，不同半徑比 α 所對應的流速分佈圖。 $(r/R_1 = 1)$ 為內圓柱位置；由左至右的虛線分別為 $\alpha = 1.1$ 、 1.5 、 1.75 和 2.12 時外圓柱的位置； \blacktriangle 為近似解之分佈

Fig.6 The velocity profiles of different radius ratio a with Bingham number $B = 1$. The location of inner cylinder is at $r/R_1 = 1$. The outer cylinders locates at $r/R_1 = 1.1, 1.5, 1.75$ and 2.12 for the profiles from left to right. \blacktriangle is for the approximate profile obtained by Eq. 47

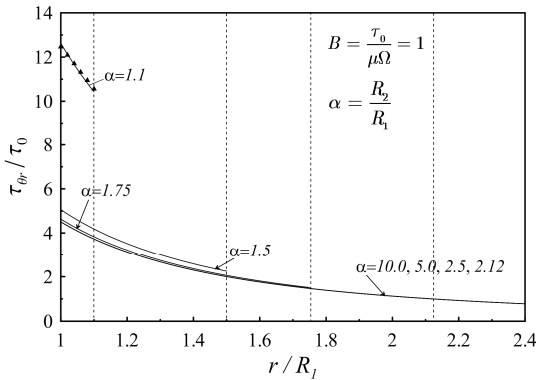


圖 7 賓漢數 $B=1$ 時，不同半徑比 α 所對應的剪力分佈圖。 $(r/R_1 = 1)$ 為內圓柱位置；由左至右的虛線分別為 $\alpha = 1.1$ 、 1.5 、 1.75 和 2.123 時外圓柱的位置； \blacktriangle 為近似解之分佈

Fig.7 The shear stress profiles of different radius ratio a with Bingham number $B = 1$. The location of inner cylinder is at $r/R_1 = 1$. The outer cylinders locates at $r/R_1 = 1.1, 1.5, 1.75$ and 2.12 for the profiles from left to right. \blacktriangle is for the approximate profile obtained by Eq. 46

3. 極端值分析

由四.2 小節可知當流況存在弱剪層時，對於降伏應力與黏滯係數不變的流體而言，固定內圓柱轉速 Ω 並增加兩圓柱之間距（即 $\alpha = R_2/R_1$ 增加），流速和剪力分佈會維持不變，所以在此不討論兩圓柱相距很遠 ($\alpha \rightarrow \infty$) 的極端狀況。然而從圖 6 和圖 7 中可見兩圓柱很靠近（半徑比 $\alpha \rightarrow 1$ ）時，流速跟剪力剖面趨近線性分佈，因此本節將推導此近似解。

當兩圓柱非常接近 ($\alpha \rightarrow 1$) 時，由於流況無弱剪層存在而可用 (36) 和 (37) 式來表示流速與剪力分佈。首先令半徑比 α 為

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1} = 1 + \lambda \quad (43)$$

由於 $\alpha \rightarrow 1$ 因此 $\lambda \ll 1$ ，同時無因次的自變數 $r \rightarrow 1$ 。把 (43) 式代入 (36) 和 (37) 式後，再配合 Taylor 展開式並省略 $O(\lambda)$ 的微小項，得到無因次的近似剪力與流速分別如下：

$$\tau_{\theta r} \equiv \frac{2}{\lambda(\lambda+2)} \left[\frac{2B}{\lambda+2} + 2 - \frac{4}{\lambda(\lambda+2)}(r-1) \right] \quad (44)$$

$$u_{\theta} \equiv 1 - \frac{B\lambda}{\lambda+2} - \frac{2}{\lambda+2}(r-1) \quad (45)$$

因次回復後分別為：

$$\tau_{\theta r} \equiv \frac{2\mu\Omega R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{2\tau_0 R_1}{R_2 + R_1} - 2 + \frac{4R_1(r - R_1)}{R_2^2 - R_1^2} \quad (46)$$

$$u_{\theta} \equiv R_1\Omega \left[1 - \frac{2(r - R_1)}{R_2 + R_1} \right] - \tau_0 \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \quad (47)$$

為了與四.2 小節中分析的例子互相驗證，把半徑比 $\alpha (= R_2/R_1) = 1.1$ 和賓漢數 $B (= \tau_0/\mu\Omega) = 1$ 的條件代入 (46) 和 (47) 式，再將此近似的流速和剪力分佈，以三角形 (\blacktriangle) 分別標示於圖 6 和圖 7 中，由結果可知近似解的誤差在 5% 以內。

至此，兩圓柱非常接近 ($\alpha = R_2/R_1 \rightarrow 1$) 時之流況近似解已求出，剪力和流速可分別由 (46) 和 (47) 式表示。

五、流變參數檢定之應用

賓漢流體需要檢定的流變參數為降伏應力 τ_0 和動力黏滯係數 μ 。運用同心圓柱型式的流變儀來檢定參數時，內外圓柱之半徑（分別為 R_1 和 R_2 ）為已知的參數，當使用者給定一內圓柱的轉速 ω 後，方可量測到內圓柱上所受的剪力值 Γ ，接著重複給定不同 ω 而得到不同的 Γ ，最後再將這些量測值代入檢定公式即可求出流變參數。本小節將利用解析解配合最小平方法 (Least-square method) 得到降伏應力 τ_0 與黏滯係數 μ 之檢定公式。從第二節可知流況有兩種，分別為「弱剪層存在」與「無弱剪層」之流況，不同流況所採用的參數檢定公式也不同，而分辨流況的準則就是以量測的過程中，靠近外圓柱的流體是否有運動為判斷。

1. 靠近外圓柱流體在運動時之檢定公式

當靠近外圓柱的流體都在運動時，流況無弱剪層存在，因此內圓柱上之剪力 τ 與轉速 Ω 的關係如下：

$$\tau = \mu \frac{2\Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} + \tau_0 \frac{2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (48)$$

其中， R_1 和 R_2 為已知， τ 和 Ω 為試驗中之多組量測值； τ_0 和 μ 為待檢定的未知參數。(48) 式為一線性方程式，運用作圖法可直接從斜率與截距分別找出兩個待檢定的參數值，或更精確的使用統計檢定法來求參數，而利用最小平方法於 (48) 式得到的檢定公式如下：

假設有 N 組數據，第 i 組的轉速與剪力分別為 ω_i 與 Γ_i ，其中 $i = 1 \dots N$ 。

動力黏滯係數 μ 的檢定公式為：

$$\mu = \left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{2R_2^2} \right) \frac{N \cdot \sum_{i=1}^N \Gamma_i \omega_i - \sum_{i=1}^N \Gamma_i \cdot \sum_{i=1}^N \omega_i}{\left[N \cdot \sum_{i=1}^N \omega_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N \omega_i \right)^2 \right]} \quad (49)$$

降伏應力 τ_0 的檢定公式為：

$$\tau_0 = \frac{1}{N} \left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{2R_2^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \right) \times \left\{ \frac{N \cdot \sum_{i=1}^N \Gamma_i \omega_i \cdot \sum_{i=1}^N \omega_i - \sum_{i=1}^N \Gamma_i \cdot \left(\sum_{i=1}^N \omega_i \right)^2}{\left[N \cdot \sum_{i=1}^N \omega_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N \omega_i \right)^2 \right]} - \sum_{i=1}^N \Gamma_i \right\} \quad (50)$$

以上是「無弱剪層存在」時的參數檢定公式。

2. 靠近外圓柱流體無運動時之檢定公式

量測過程中靠近外圓柱的流體沒有運動時，表示流況存在弱剪層，因此內圓柱上之剪力 τ 與強剪層厚度的關係如下：

$$\tau = \tau_0 \left(1 + \frac{\delta}{R_1} \right)^2 \quad (51)$$

其中，強剪層厚度 δ 與降伏應力 τ_0 和黏滯係數 μ 的關係如下：

$$\frac{\mu \Omega}{\tau_0} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\delta}{R_1} \right)^2 - \frac{1}{2} - \ln \left(1 + \frac{\delta}{R_1} \right) \quad (52)$$

假設有 N 組數據，第 i 組的轉速與剪力分別為 ω_i 與 Γ_i ，其中 $i = 1 \dots N$ 。運用 (51) 和 (52) 式可得第 i 組之轉速與剪力的關係如下：

$$\frac{\Gamma_i}{\tau_0} = \frac{2\mu\omega_i}{\tau_0} + 1 + \ln\left(\frac{\Gamma_i}{\tau_0}\right) \quad (53)$$

上式為一非線性方程式，直接採用最小平方法於此式會得到複雜的非線性參數檢定公式，需要使用數值方法才能求出參數。為了簡化運算且準確的找出參數值，在此採用微擾法於 (53) 式得到最大誤差在 10% 以內之參數檢定公式，詳細推導過於附錄 A，而公式分別如下：

動力黏滯係數 μ 的檢定公式為：

$$\mu = \mu^{(0)} + \frac{\varepsilon \tau_0^{(0)} \left[N \cdot \sum_{i=1}^N (\omega_i \cdot \ln \Gamma_i) - \sum_{i=1}^N \ln \Gamma_i \cdot \sum_{i=1}^N \omega_i \right]}{2 \left[\left(\sum_{i=1}^N \omega_i \right)^2 - \sum_{i=1}^N (\omega_i)^2 \right]} \quad (54)$$

其中

$$\mu^{(0)} = \frac{\left[\sum_{i=1}^N \Gamma_i \cdot \sum_{i=1}^N \omega_i - N \cdot \sum_{i=1}^N (\Gamma_i \omega_i) \right]}{2 \left[\left(\sum_{i=1}^N \omega_i \right)^2 - \sum_{i=1}^N (\omega_i)^2 \right]} \quad (55)$$

$$\tau_0^{(0)} = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \Gamma_i - 2\mu^{(0)} \cdot \sum_{i=1}^N \omega_i \right) \quad (56)$$

$$\varepsilon = \frac{\tau_0^{(0)} \cdot \left[\sum_{i=1}^N \ln \Gamma_i - N \cdot \ln(\tau_0^{(0)}) \right]}{\sum_{i=1}^N \Gamma_i} \quad (57)$$

降伏應力 τ_0 的檢定公式為：

$$\tau_0 = \tau_0^{(0)} - \frac{\varepsilon}{N} \left[\tau_0^{(0)} \cdot \sum_{i=1}^N \ln \Gamma_i - N \tau_0^{(0)} \ln(\tau_0^{(0)}) + 2\mu^{(1)} \cdot \sum_{i=1}^N \omega_i \right] \quad (58)$$

其中， $\tau_0^{(0)}$ 和 ε 分別如 (56) 和 (57) 式且

$$\mu^{(1)} = \frac{\mu^{(0)} \left[N \cdot \sum_{i=1}^N (\omega_i \cdot \ln \Gamma_i) - \sum_{i=1}^N \ln \Gamma_i \cdot \sum_{i=1}^N \omega_i \right]}{2 \left[\left(\sum_{i=1}^N \omega_i \right)^2 - \sum_{i=1}^N (\omega_i)^2 \right]} \quad (59)$$

以上即為「弱剪層存在」時的流變參數檢定公式，此公式誤差在 10% 以內。

六、結 論

本研究推导出非觸變性賓漢流體在兩同心圓柱間所有穩態流況的理論解。由於降伏應力 τ_0 的存在，穩態流況還分成「弱剪層存在」及「無弱剪層」兩種不同的流況來討論，由理論可找出分辨此兩種流況之臨界賓漢數 B_{cr} 。接著，外內兩圓柱半徑之比值 α 和賓漢數 B (即無因次的降伏應力) 對於流況的影響，以及兩圓柱很接近 ($\alpha \rightarrow 1$) 之近似解也分別進行分析與討論。最後，利用最小平方方法來推求降伏應力 τ_0 與動力黏滯係數 μ 的參數檢定公式，「弱剪層存在」及「無弱剪層」之流況分別有不同的檢定公式，尤其是無弱剪層的流況解為非線性的關係，在此採用微擾法搭配最小平方方法得到誤差在 10% 以內的參數檢定公式。期望本文之成果在非觸變賓漢流體之流變參數檢定的應用上能有所幫助。

誌 謝

感謝國科會計畫的資助，計畫編號為 NSC 96-2625-Z-002-006-MY3。

附錄 A、利用微擾法於 (53) 式推求參數檢定方程式

流變儀在量測時，靠近外圓柱處之流體沒有運動的情況下，內圓柱上量測得到第 i 組的剪力 Γ_i 與轉速 ω_i 的關係可由下式表示：

$$\frac{\Gamma_i}{\tau_0} = \frac{2\mu\omega_i}{\tau_0} + 1 + \ln\left(\frac{\Gamma_i}{\tau_0}\right) \quad (A.1)$$

其中，假設總共有 N 組量測值，即 $i = 1 \dots N$ ；內圓柱上之剪力必定大於降伏應力，因此 (A.1) 式內 $\Gamma_i/\tau_0 > 1$ 。

$\ln(\Gamma_i/\tau_0)/(\Gamma_i/\tau_0)$ 隨 Γ_i/τ_0 變化的情形如圖 A1 所示，從此圖中可發現

$$\frac{\ln\left(\frac{\Gamma_i}{\tau_0}\right)}{\frac{\Gamma_i}{\tau_0}} \leq 0.367 \quad (A.2)$$

表示 $\ln(\Gamma_i/\tau_0)$ 項在 (A.1) 式中是數值相對小的項，因此可忽略 (A.1) 式的 $\ln(\Gamma_i/\tau_0)$ 項得到簡化之剪力 Γ_i 與轉速 ω_i 的關係：

$$\Gamma_i = 2\mu\omega_i + \tau_0 \quad (A.3)$$

接著，由 (A.3) 式可得到的黏滯係數 μ 與降伏應力 τ_0 之檢定公式分別為：

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N \Gamma_i \cdot \sum_{i=1}^N \omega_i - N \cdot \sum_{i=1}^N (\Gamma_i \omega_i)}{2 \left[\left(\sum_{i=1}^N \omega_i \right)^2 - \sum_{i=1}^N (\omega_i)^2 \right]} \quad (A.4)$$

$$\tau_0 = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \Gamma_i - 2\mu \cdot \sum_{i=1}^N \omega_i \right) \quad (A.5)$$

其中，由 (A.2) 式可知 (A.4) 式和 (A.5) 式的誤差約為 30%。為了提高檢定公式之精準度，在此運用微擾法對 (A.1) 式展開，以找出檢定公式的微小修正項。

令微小參數 ε 如下：

$$\varepsilon = O \left(\frac{\sum_{i=1}^N \ln\left(\frac{\Gamma_i}{\tau_0^{(0)}}\right)}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\Gamma_i}{\tau_0^{(0)}}\right)} \right) \ll 1 \quad (A.6)$$

代入 (A.6) 式後 (A.1) 式變成

$$\frac{\Gamma_i}{\tau_0} = \frac{2\mu\omega_i}{\tau_0} + 1 + \varepsilon \ln\left(\frac{\Gamma_i}{\tau_0}\right) \quad (A.7)$$

在檢定參數時, (A.7) 式中未知數為降伏應力 τ_0 與動力黏滯係數 μ , 因此由 (A.6) 式之微小參數 ε 展開的數列如下:

$$\tau_0 = \tau_0^{(0)} + \varepsilon\tau_0^{(1)} + \varepsilon^2\tau_0^{(2)} + \dots \quad (A.8)$$

$$\mu = \mu^{(0)} + \varepsilon\mu^{(1)} + \varepsilon^2\mu^{(2)} + \dots \quad (A.9)$$

將 (A.8) 與 (A.9) 式代入 (A.7) 式後, 展開並整理到第一階 $O(\varepsilon^1)$ 的方程式如下:

$$O(\varepsilon^0): E^{(0)} = 2\mu^{(0)}\omega_i + \tau_0^{(0)} = \Gamma_i \quad (A.10)$$

$$O(\varepsilon^1): E^{(1)} = 2\mu^{(1)}\omega_i + \tau_0^{(1)} = -\tau_0^{(0)} \ln\left(\frac{\Gamma_i}{\tau_0^{(0)}}\right) \quad (A.11)$$

其中, $E^{(0)}$ 和 $E^{(1)}$ 為第零階和第一階的實驗量測值與模式理論值之誤差。由 (A.2) 式可知 $\varepsilon \leq 0.367$, 因此求解到第一階的檢定公式的最大誤差在 10% 以內。

由於 (A.10) 式與 (A.3) 式相等, 因此第零階之動力黏滯係數 $\mu^{(0)}$ 和降伏應力 $\tau_0^{(0)}$ 之檢定公式即分別為 (A.4) 式與 (A.5) 式。接著, 由第一階的 (A.11) 式, 使用最小平方法得到的檢定公式項正項如下

黏滯係數的修正項:

$$\mu^{(0)} = \frac{\tau_0^{(0)} \left[N \cdot \sum_{i=1}^N (\omega_i \cdot \ln \Gamma_i) - \sum_{i=1}^N \ln \Gamma_i \cdot \sum_{i=1}^N \omega_i \right]}{2 \left[\left(\sum_{i=1}^N \omega_i \right)^2 - \sum_{i=1}^N (\omega_i)^2 \right]} \quad (A.12)$$

降伏應力的修正項:

$$\tau_0^{(1)} = -\frac{1}{N} \left[\tau_0^{(0)} \cdot \sum_{i=1}^N \ln \Gamma_i - N \cdot \tau_0^{(0)} \ln \left(\tau_0^{(0)} \right) + 2\mu^{(1)} \sum_{i=1}^N \omega_i \right] \quad (A.13)$$

最後, 結合第零階與第一階的結果, 黏滯係數 μ 之檢定公式為:

$$\mu = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^N \Gamma_i \cdot \sum_{i=1}^N \omega_i - N \cdot \sum_{i=1}^N (\Gamma_i \omega_i)}{2 \left[\left(\sum_{i=1}^N \omega_i \right)^2 - \sum_{i=1}^N (\omega_i)^2 \right]} \right\} + \frac{\tau_0^{(0)} \left[N \cdot \sum_{i=1}^N (\omega_i \cdot \ln \Gamma_i) - \sum_{i=1}^N \ln \Gamma_i \cdot \sum_{i=1}^N \omega_i \right]}{\varepsilon \cdot 2 \left[\left(\sum_{i=1}^N \omega_i \right)^2 - \sum_{i=1}^N (\omega_i)^2 \right]} \quad (A.14)$$

而降伏應力 τ_0 之檢定公式為:

$$\tau_0 = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \Gamma_i - 2\mu^{(0)} \sum_{i=1}^N \omega_i \right) - \frac{\varepsilon}{N} \left[\tau_0^{(0)} \times \sum_{i=1}^N \ln \Gamma_i - N \cdot \tau_0^{(0)} \ln \left(\tau_0^{(0)} \right) + 2\mu^{(1)} \sum_{i=1}^N \omega_i \right] \quad (A.15)$$

其中, $\tau^{(0)}$ 、 $\mu^{(0)}$ 和 $\mu^{(1)}$ 分別如 (A.5)、(A.4) 和 (A.12) 式且

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{\Gamma_i}{\tau_0^{(0)}} \right)}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\Gamma_i}{\tau_0^{(0)}} \right)} = \frac{\tau_0^{(0)} \cdot \left[\sum_{i=1}^N \ln \Gamma_i - N \cdot \ln \left(\tau_0^{(0)} \right) \right]}{\sum_{i=1}^N \Gamma_i} \quad (A.16)$$

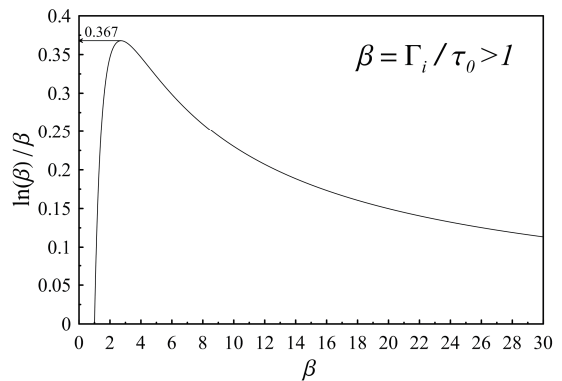


圖 A1 $\ln(\Gamma_i/\tau_0)/(\Gamma_i/\tau_0)$ 與 Γ_i/τ_0 的關係圖

Fig.A1 Relation between $\frac{\ln \beta}{\beta}$ and β , where $\beta = \Gamma_i / \tau_0$ in Eq. A.1

欲使用本檢定公式時，須先將 Γ_i 與 ω_i 量測值代入 (A.4) 式求出 $\mu^{(0)}$ 後，即可依序分別求出 $\tau^{(0)}$ 、 ε 、 $\mu^{(1)}$ 與 $\tau^{(1)}$ ，最後再將這些項代回 (A.15) 和 (A.14) 式即可分別得到降伏應力 τ_0 與動力黏滯係數 μ ，並且此參數檢定公式誤差在 10% 以內。

參考文獻

1. Chatzimina, M., Georgiou, G., and Alexandrou, A. (2009). "Wall shear rates in circular Couette flow of a Heschel-Bulkley fluid." *Applied Rheology*, 19, 34288.
2. Joye, D.D. (2003). "Shear rate and viscosity corrections for a Casson fluid in cylindrical (Couette) geometries." *Journal of Colloid and Interface Science*, 267, 204-210.
3. Kelessidis, V.C., and Maglione, R. (2006). "Modeling rheological behavior of bentonite suspensions as Casson and Robertson-Stiff fluids using Newtonian and true shear rates in Couette viscometry." *Powder Technology*, 168, 134-147.
4. Taylor, G.I. (1923). "Stability of a viscous liquid contained between two rotating Cylinders." *Proceedings of the Royal Society A*, 223, 289-343.
5. Toorman, E.A. (1994). "An analytical solution for the velocity and shear rate distribution of non-ideal Bingham fluids in concentric cylinder viscometers." *Rheological Acta*, 33, 193-202.
6. Yih, C.S. (1979). *Fluid Mechanics: A concise introduction to the theory*, West River Press, Ann Arbor, USA.

2011 年 04 月 15 日 收稿

2011 年 02 月 02 日 修正

2012 年 02 月 10 日 接受

(本文開放討論至 2013 年 3 月 31 日)